

Ergänzung: Integration auf $\mathbb{R}^n$ -326-

Quader $Q := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$

Volumen: $|Q| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

Def: Sei $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Setze $\int_Q f \, dx :=$

$$\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right.$$

„iteriertes Integral“ $\dots dx_{n-1}) dx_n$
Existenz? ∇

Bem: 1.) die Reihenfolge darf beliebig vertauscht werden, für $n=2$ ist etwa

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

326 *

Beweis: Setze

$$I(t) := \int_a^t \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx,$$

$$Y(t) := \int_c^d \left(\int_a^t f(x,y) dx \right) dy$$

$$\bullet \quad I(a) = Y(a) = 0$$

$$\bullet \quad I'(t) = \int_c^d f(t,y) dy \quad \text{Hauptsatz} \quad \text{und}$$

$$Y'(t) \stackrel{\substack{\text{Ableiten} \\ \text{nach dem Parameter} \\ \text{und Hauptsatz}}}{=} \int_c^d f(t,y) dy$$

$$\left[Y'(t) = \int_c^d \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_a^t f(x,y) dx \right) dy = \int_c^d f(t,y) dy \right]$$

$$\Rightarrow I = Y, \quad \text{speziell: } I(b) = Y(b)$$

□

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx =$$

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

$$2.) \quad \boxed{\int_Q 1 dx = |Q|}$$

3.) wie üblich gilt. $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\int_Q (\alpha f + \beta g) dx = \dots$$

Sei E ein elementarer Bereich $\subset \mathbb{R}^n$,

d.h.

$$E := \bigcup_{i=1}^m Q_i$$

mit Quadraten Q_i , die keine
inneren Punkte gemeinsam haben dürfen.

Def: Für stetige $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Sei } \int_E f dx := \sum_{i=1}^m \int_{Q_i} f dx$$

Wie integriert man über allgemeine Mengen?

~~anmerkung~~

Vorstufe: Sei

$$\Phi: Q \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad Q = \text{Quader},$$

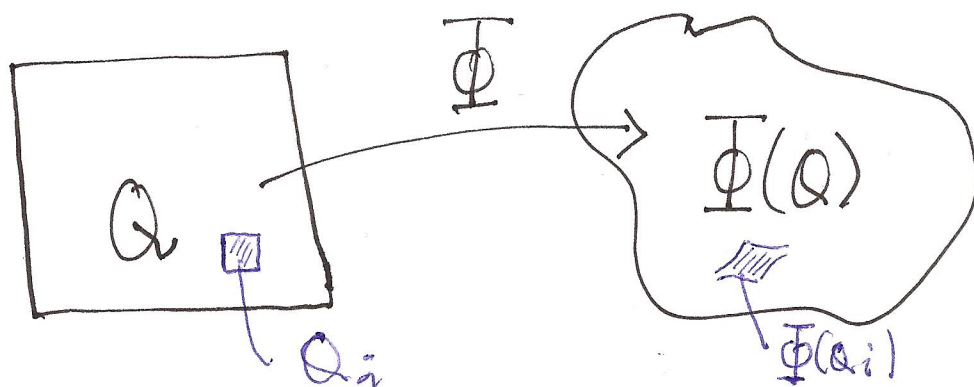
stetig

γ diff'bar. Was ist ein vernünftiges

Maß für das

~~Maß~~ von $\Phi(Q)$?

Volumen



Idee: zerlege $Q = \bigcup_{i=1}^m Q_i$ mit
 vielen kleinen Quad^{ern} Q_i ; auf Q_i
 ersetze Φ durch

$$\begin{cases} x \mapsto D\Phi(q_i)(x - q_i) + \Phi(q_i), \\ q_i \in Q_i \end{cases}$$

affin lineare
 Diese Abbildung macht aus Q_i ein
 Parallelogramm mit dem Inhalt

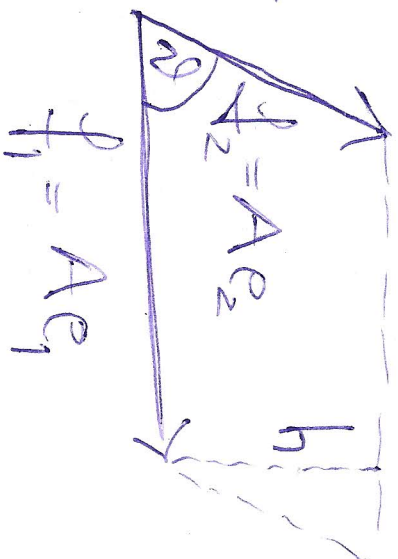
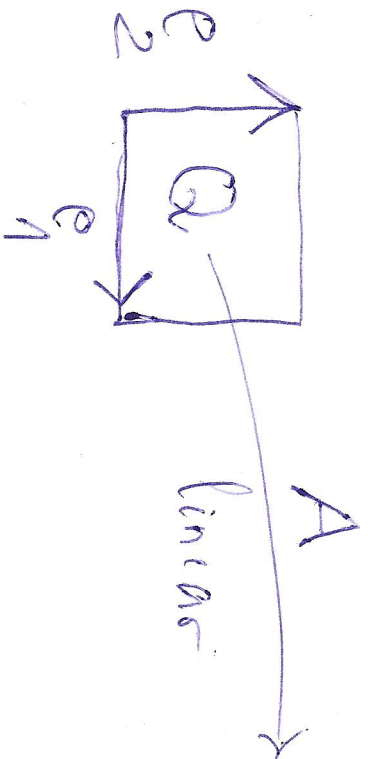
$$|\det D\Phi(q_i)| \cdot |Q_i|$$

(vgl. p. 9, b)

Also: Volumen ~~von~~ $\Phi(Q) \approx$

"Nichtrechnung"

-a-



$$\text{Fläche von } A(Q) = |f_1| \cdot h =$$

$$|f_1| |f_2| \sin \vartheta =$$

$$|f_1| |f_2| \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} =$$

$$|f_1| |f_2| \sqrt{1 - \left(\frac{f_1}{|f_1|} \cdot \frac{f_2}{|f_2|} \right)^2} =$$

$$\sqrt{|f_1|^2 |f_2|^2 - (f_1 \cdot f_2)^2} \quad (= |\det A|)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow f_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\quad} = \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2) - (ab+cd)^2}$$

$$= \sqrt{a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 - (a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd)}$$

$$= \sqrt{a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd}$$

$$= \sqrt{(ad - cb)^2} = |\det A|$$

Ergebnis: $\boxed{\text{Fläche von } A(Q) = |\det A|}$

$$\Rightarrow \text{Fläche von } A(\tilde{Q}) = |\det A| |\tilde{Q}|$$

für beliebige Quader $\tilde{Q}$ $= \int_{\tilde{Q}} |\det A| dx$

$$\sum_{i=1}^m |\det D\Phi(q_i)| |Q_i|$$

Def : $|\Phi(Q)| := \int_Q |\det D\Phi(x)| dx$

„Flächeninhalt“ von $\Phi(Q)$

↖ Volumen

Nun entspricht $|\Phi(Q)|$ dem Integral
 $\int_{\Phi(Q)} 1 dx$
 zu definierenden

der konstanten Funktion 1 über $\Phi(Q)$.

Man setzt allgemein:

$$\int_{\Phi(Q)} f dx := \int_Q f \circ \Phi |\det D\Phi| dx$$

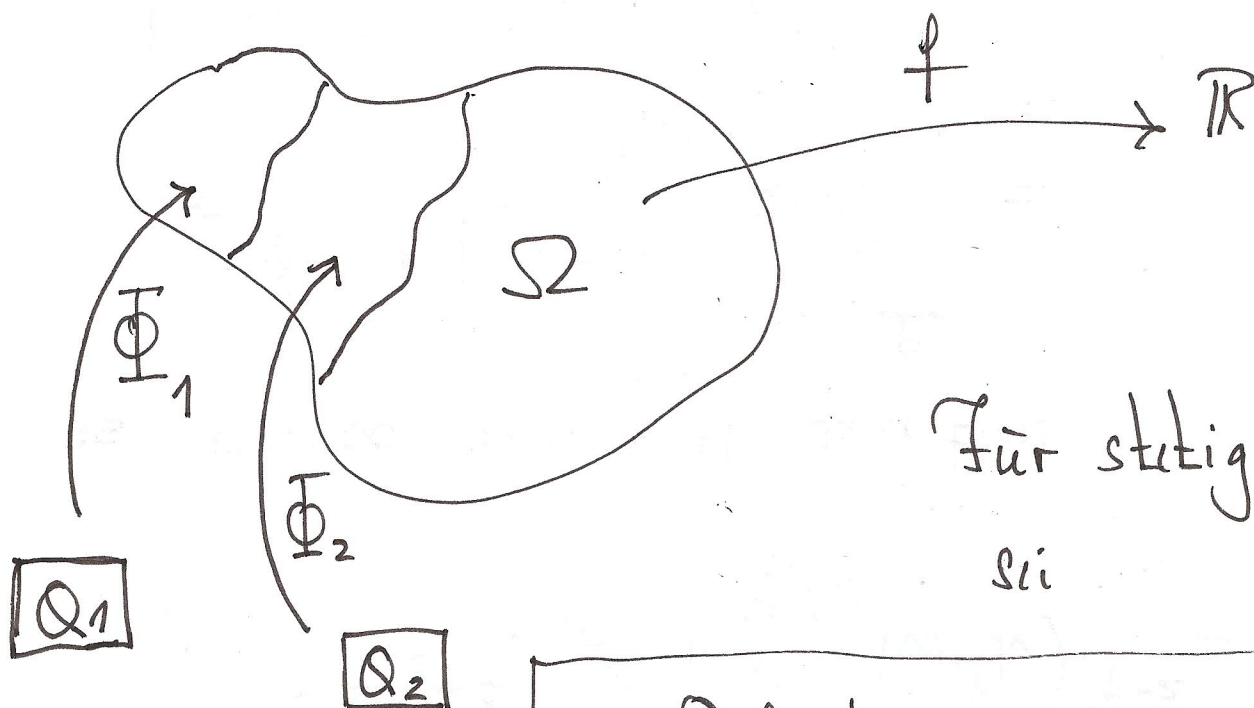
für stetige $f : \Phi(Q) \rightarrow \mathbb{R}$.

letzter Schritt:

die Menge Ω lasse sich darstellen als

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Phi_i(Q_i), \quad Q_i = \text{Quadrat},$$

wobei die $\Phi_i(Q_i)$ keine inneren Punkte
gemeinsam haben sollen.



Für stetige $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
sei

$$\int_{\Omega} f \, dx := \sum_{i=1}^m \int_{Q_i} f(\Phi_i) |\det D\Phi_i| \, dx.$$

Beispiel 1:

$$B := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$

$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = ?$$

Polarkoordinaten $\Phi(r, \vartheta) = r(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$

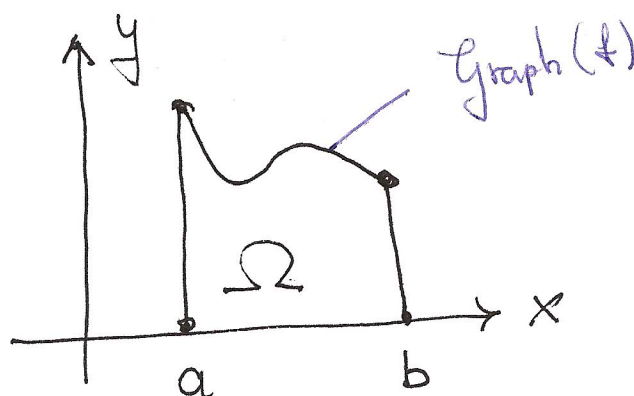
$$\Rightarrow \int_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)}$$

$\cdot r \, d\vartheta \, dr$

$$= \int_0^1 r^2 \, dr \cdot 2\pi = \boxed{\frac{2}{3} \pi}$$

(hierbei: $\det J\Phi = r$)

Beispiel 2:



Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$.

$\Omega :=$ Fläche unter $\text{Graph}(f)$

Frage: $\int_{\Omega} 1 \, dx \, dy = ?$

beschreibende Abbildung

$$\Phi: [a, b] \times [0, 1] \ni (x, y) \mapsto (x, y f(x)) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \Omega = \Phi([a, b] \times [0, 1])$$

$$\text{also: } \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \stackrel{\uparrow}{=} \int_a^b \int_0^1 f(x) \, dy \, dx$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx \quad , \quad \text{S. p. 334}$$

denn

$$J\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y\varphi'(x) & \varphi(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J\Phi(x, y) = \varphi(x)$$

Für stetige $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folgt

$$\int_{\Omega} F \, dx \, dy =$$

$$\int_a^b \left(\int_0^1 F(x, y \varphi(x)) \, dy \right) \varphi(x) \, dx$$

□